Chapitre 17

Matrices et applications linéaires

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère $n, m, p \in \mathbb{N}^*$.
E, F, G désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de dimension finie.**

1 Matrice associée à un morphisme

1.1 Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Définition 17.1 (Matrice d'un vecteur)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$ qui s'écrit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$. On appelle matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne notée

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la matrice colonne constituée des coordonnées de x selon la base $\mathcal{B}$.

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}^2$, si on note $\mathcal{B}_c = ((1,0),(0,1))$ la base canonique, alors la matrice du vecteur $x = (2,3)$ dans $\mathcal{B}_c$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x) =$$

Exemple 2. Soit $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ une base de $\mathbb{R}^2$. donner la matrice du vecteur $x = (2,3)$ dans $\mathcal{B}$.
On cherche les coordonnées de x selon $\mathcal{B}$:

$$x = (2,3) = \qquad (1,1) + \qquad (1,-1)$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) =$$

Définition 17.2 (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $(c_1, \dots, c_m)$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle matrice de $(c_1, \dots, c_m)$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice dont la j-ième colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_j)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_2) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i,j) de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m)$ est le i-ième coefficient de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_j)$. C'est donc l'unique scalaire $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tel que

$$c_j = (\cdots)e_1 + \cdots + a_{ij} e_i + \cdots + (\cdots)e_n$$

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^2$, si on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique, alors la matrice de la famille $\mathcal{F} = ((2,3),(4,5),(6,7))$ dans $\mathcal{B}_c$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{F}) =$$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Dans la suite, si $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ est une famille quelconque de vecteurs de E, on note

$$u(\mathcal{C}) := (u(c_1), \ldots, u(c_m))$$

Définition 17.3 (Matrice d'une application linéaire)

Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice de $u(\mathcal{B}_E)$ dans la base $\mathcal{B}_F$, notée

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(\mathcal{B}_E)) \\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \\
&= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1)) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_2)) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})
\end{aligned}$$

Remarque. Moyen mnémotechnique : lorsqu'on écrit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$, il faut se dire que la base $\mathcal{B}_F$ est "à gauche" et la famille $u(\mathcal{B}_E)$ est "en haut". Notamment :

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ a autant de lignes que le cardinal de $\mathcal{B}_F$, ici p.
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ a autant de colonnes que le cardinal de $\mathcal{B}_E$ ou de $u(\mathcal{B}_E)$, ici n.

Exemple 4. On considère $u(x,y,z) = (2x+5y, -x+15z)$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}(u)$, où $\mathcal{B} = ((1,2),(-2,1))$ et $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Définition 17.4 (Matrice d'un endomorphisme dans une base)

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$$

Avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \\
& \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1)) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_2)) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})
\end{aligned}$$

Exemple 5. Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, la matrice de id_E dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\quad) & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\quad) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\quad) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) =$

Exemple 6. On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ avec pour base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(P) = P'$. Alors

$$u(1) =$$
$$u(X) =$$
$$u(X^2) =$$
$$u(X^3) =$$

Donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

Proposition 17.5 (Calcul de $u(x)$ avec des matrices)

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases respectives de E, F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Exemple 7. Si on reprend l'exemple précédent, prenons $P = X^3 + 2X^2 + 1$ et calculons sa dérivée par la méthode matricielle (ici $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}$) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(P)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P)$$

1.3 Opérations avec les matrices associées

Théorème 17.6 (Matrice de $u+v$, de λu)

On suppose que $\dim E = n$ et $\dim F = p$, avec $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases respectives de E, F. Alors l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})\\ u &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)\end{aligned}$$

est un **isomorphisme** d'e.v.

En particulier, pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(v)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(\lambda u) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(v) \iff u = v$$

Remarque. À noter que l'application Φ dépend du choix des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Il faut donc absolument que ce soient les mêmes bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ qui apparaissent à chaque "Mat".

Remarque. Le théorème (re)démontre en particulier que $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie avec

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) = np = \dim E \times \dim F$$

Théorème 17.7 (Matrice de $v \circ u$)

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases respectives de E, F, G. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}{}^{\mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}{}^{\mathcal{B}_F}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$$

Théorème 17.8 (Matrice de u^{-1})

Soit $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases respectives de E, F. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est bijective si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible. Si tel est le cas, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)\right)^{-1}$$

Démonstration. Comme u est un isomorphisme, E et F ont même dimension et on peut poser $n = \dim E = \dim F$. De plus, par le théorème précédent, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_E}(u^{-1} \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathrm{id}_E) = I_n$$

De même, on montre que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1}) = I_n$$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible d'inverse $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}{}^{\mathcal{B}_F}(u^{-1})$. □

1.4 Reformulation pour les endomorphismes

On reformule les résultats obtenus en section 1.3 dans le cas $E = F$: dans ce cas on prend quasi-systématiquement la même base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. Soit donc $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On note

$$U := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \qquad V := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \qquad X := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{u(x)}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \boxed{UX}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{\alpha u + \beta v}) = \alpha \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \beta \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \boxed{\alpha U + \beta V}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{v \circ u}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \boxed{VU}$$

$u \in GL(E)$ ssi $U \in GL_n(\mathbb{R})$ et alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\boxed{u^{-1}}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^{-1} = \boxed{U^{-1}}$$

2 Morphisme canoniquement associé à une matrice

Définition 17.9

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle morphisme canoniquement associé à A l'unique application linéaire $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(u_A)$$

où $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ sont les bases **canoniques** respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$. *(notation non officielle pour $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_p$)*

Remarque (Identification $\mathbb{K}^n$–$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il est très courant d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ peut donc s'écrire de deux manières :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \underset{\text{identification}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x) \qquad \text{avec } \mathcal{B}_c \text{ la base } \textbf{canonique} \text{ de } \mathbb{K}^n$$

Ne pas confondre x avec la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$, où il n'y a pas de virgule. Muni de cette identification, on peut par exemple écrire que

$$\begin{cases} u_A : \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^p \\ \quad X & \mapsto AX \end{cases} \qquad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Définition 17.10

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ son morphisme associé. On définit

- Le noyau de A par $\mathrm{Ker}\, A := \mathrm{Ker}\,(u_A)$: c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- L'image de A par $\mathrm{Im}\, A := \mathrm{Im}\,(u_A)$: c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{K}^p = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
- Le rang de A par $\mathrm{rg}\, A := \mathrm{rg}\, u_A = \dim(\mathrm{Im}\, u_A) = \dim(\mathrm{Im}\, A)$.

Proposition 17.11 (Caractérisations de Ker A et Im A)

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $Y \in \mathbb{K}^p$.

$$X \in \operatorname{Ker} A \iff AX = 0$$

$$Y \in \operatorname{Im} A \iff \exists X \in \mathbb{K}^n \qquad AX = Y$$

Proposition 17.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \iff \quad \operatorname{Ker} A = \{0\} \quad \iff \quad \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n \quad \iff \quad \operatorname{rg} A = n$$

Démonstration. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son morphisme associé est un endomorphisme : $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. D'une part, on a vu en section 1.4 que $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $u_A \in GL(\mathbb{K}^n)$.
D'autre part, comme $u_A : \mathbb{K}^n \to \boxed{\mathbb{K}^n}$, les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales. Alors, on a vu au chapitre précédent que :

$$u_A \text{ est inversible} \quad \iff \quad \underbrace{\operatorname{Ker} u_A}_{=\operatorname{Ker} A} = \{0\} \quad \iff \quad \underbrace{\operatorname{Im} u_A}_{=\operatorname{Im} A} = \boxed{\mathbb{K}^n} \quad \iff \quad \underbrace{\operatorname{rg} u_A}_{=\operatorname{rg} A} = \dim \boxed{\mathbb{K}^n} = n$$

□

3 Retour sur les systèmes linéaires

Soit $B \in \mathbb{K}^p$ et $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On considère un système linéaire sous écriture matricielle :

$$(\mathcal{S}) : \quad AX = B \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{K}^n$$

ainsi que le système linéaire homogène associé :

$$(\mathcal{S}_0) : \quad AX = 0 \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathbb{K}^n$$

Enfin, on note S et S_0 les ensembles de solutions de (S) et (S_0) respectivement.

3.1 Cas général

Tout découle de la Proposition 17.11 :

- Les solutions du système $(\mathcal{S}_0)$ sont exactement les vecteurs du noyau de A :
$$S_0 = \operatorname{Ker} A$$
- Le système $(\mathcal{S})$ est compatible (i.e. admet une solution) si et seulement si B est dans l'image de A :
$$S \neq \varnothing \iff B \in \operatorname{Im} A$$
- Lorsque $B \in \operatorname{Im} A$, étant donné $X_{part} \in S$ une solution particulière quelconque de $(\mathcal{S})$, on a
$$S = X_{part} + S_0 = \{X_{part} + X_H \mid X_H \in S_0\}$$
$$X \in S \quad \iff \quad \exists X_H \in S_0 \qquad X = X_{part} + X_H$$

On remarquera que S_0 est un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Si $S_0 = \{0\}$, on a $S = \varnothing$ (si $B \notin \operatorname{Im} A$) ou $S = \{X_{part}\}$ (si $B \in \operatorname{Im} A$). Autrement dit, si $S_0 = \{0\}$, il y a unicité de la solution (mais pas forcément existence).

3.2 Cas particulier : $p = n$ et A inversible

Proposition 17.13

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée inversible, on dit que $AX = B$ est un système de Cramer.
Il y a alors existence et unicité de la solution : elle est donnée par $X = A^{-1}B$.

Démonstration. Immédiat, mais voici un éclairage intéressant de ce qu'on a vu plus haut. Comme A est inversible, on a :

- $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, donc $S_0 = \{0\}$. La solution, si elle existe, est unique.
- $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$, donc on a toujours $S \neq \varnothing$. La solution existe.

Ainsi, il y a existence et unicité de la solution de $AX = B$. On remarque que $X = A^{-1}B$ convient. □

3.3 Utilisation de systèmes linéaires pour trouver noyau et image

Méthode (Recherche de noyau et/ou image d'une matrice ou d'un morphisme)

Bien regarder la méthode sur les exemples qui suivent (également vue en TD).

Exemple 8. Déterminer le noyau et l'image de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 9. Déterminer le noyau et l'image de $u(x,y,z) = (2x-y-2z, y, x-y-z)$.

4 Changements de base

4.1 Matrices de passage

On a vu aux exemples 2 et 4 qu'il n'est pas facile d'écrire la matrice d'un vecteur ou d'une application linéaire d'une base à une autre.

Définition 17.14

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice notée

$$P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

Si $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, on a donc

$$P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$$

Attention à l'ordre ! ! La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Remarque. La matrice de passage d'une base canonique $\mathcal{B}_c$ à une base quelconque $\mathcal{B}$, càd $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ est très facile à calculer :

Exemple 10. On pose $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.

À noter : une matrice de passage est toujours carrée. Si on note $n = \dim E$, alors $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 17.15

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, et $n = \dim E$. Alors $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$\left(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$$

Exemple 11. (suite de l'exemple précédent) Calculer $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$.

4.2 Changements de base

Proposition 17.16 (Changement de base pour un vecteur)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Exemple 12. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$. Déterminer la matrice du vecteur $x = (1,-1,0)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 17.17 (Changement de bases pour un morphisme)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{C}}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(u)\, P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$$

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(u)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(u)$, $P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{C}}$, cette relation se réécrit

$$A' = QAP$$

Proposition 17.18 (Changement de base pour un endomorphisme)

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\, P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$$

Si on pose $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$, cette relation se réécrit

$$A' = P^{-1}AP$$

Exemple 13. On considère $\mathcal{B} = ((1,2,3),(2,3,4),(3,4,4))$, et

$$u(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x+4y+4z \\ -6x-7y-8z \\ 3x+4y+5z \end{pmatrix}$$

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. En déduire que u est un projecteur, et déterminer ses éléments caractéristiques.

4.3 Matrices équivalentes et opérations élémentaires

Définition 17.19 (Matrices équivalentes)

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On dit que A' est équivalente à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A' = QAP$$

On trouve aussi une formulation alternative : A' est équivalente à A s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A' = Q^{-1}AP$$

Remarque. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et A, A' deux matrices qui représentent u dans des bases différentes (par exemple $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}{}^{\mathcal{B}'}(u)$). Alors A et A' sont équivalentes, cf Proposition 17.17.

Proposition 17.20

La relation “être équivalente à” est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrons successivement la réflexivité, la symétrie et la transitivité de cette relation.

- On a $A = I_p^{-1} A I_n$ donc A est équivalente à A.
- Si B est équivalente à A, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$. Alors,

  $$A = Q^{-1}BP^{-1} = Q'BP'$$

  avec $Q' := Q^{-1} \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P' := P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$. Donc A est équivalente à B.
- Si A, B sont équivalentes et B, C le sont aussi, alors il existe $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q_1, Q_2 \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que

  $$B = Q_1AP_1 \qquad \text{et} \qquad C = Q_2BP_2$$

  D'où

  $$C = Q_2Q_1AP_1P_2 = (Q_1Q_2)A(P_1P_2)$$

  et on a bien $Q_1Q_2 \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P_1P_2 \in GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi, C est équivalente à A.

□

Définition 17.21 (Matrices de dilatation, permutation, transvection)

On se place sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle :

- Matrice de dilatation toute matrice de la forme

$$D_i(\mu) := \quad \begin{array}{rc} & \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \end{array} \in GL_n(\mathbb{K}) \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{K}^*$$

- Matrice de permutation toute matrice de la forme

$$P_{i,j} := \quad \begin{array}{rc} & \\ \begin{array}{r} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \qquad\qquad \text{col. } j \end{array} \in GL_n(\mathbb{K}) \qquad \text{avec } i \neq j$$

- Matrice de transvection toute matrice de la forme

$$T_{i,j}(\lambda) := \quad \begin{array}{rc} & \\ \begin{array}{r} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \text{ligne } j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{col. } i \qquad \text{col. } j \end{array} \in GL_n(\mathbb{K}) \qquad \text{avec } i \neq j \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

On peut vérifier que toutes ces matrices sont bien inversibles :

$$D_i(\mu)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$$

$$T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$$

Lemme 17.22 (Op. élémentaires et matrices équivalentes)

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

- Une opération élémentaire sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice :

Opération élémentaire sur A	Écriture matricielle
$L_i \leftarrow \mu L_i$	$D_i(\mu) \times A$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$P_{i,j} \times A$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$T_{i,j}(\lambda) \times A$

- Une opération élémentaire sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par une matrice :

Opération élémentaire sur A	Écriture matricielle
$C_i \leftarrow \mu C_i$	$A \times D_i(\mu)$
$C_i \leftrightarrow C_j$	$A \times P_{i,j}$
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$A \times T_{i,j}(\lambda)$

Proposition 17.23

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Si B est une matrice obtenue à partir d'opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de A, alors les matrices A et B sont équivalentes.

Démonstration. Supposons que B soit obtenue à partir de A en ayant fait :

- r opérations sur les lignes dont on note $L_1, \ldots, L_r$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°r).
- s opérations sur les colonnes dont on note $C_1, \ldots, C_s$ les matrices associées (à l'opération n°1, n°2, ..., n°s).

Alors

$$B = L_r \cdots L_1 A C_1 \cdots C_s$$

En posant $Q = L_r \cdots L_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P = C_1 \cdots C_s \in GL_n(\mathbb{K})$, on a donc $B = QAP$. D'où A et B sont équivalentes. □

4.4 Résultats théorique sur le rang

Proposition 17.24

Si deux matrices sont équivalentes, alors elles ont le même rang.

Démonstration. Soit $A', A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ deux matrices équivalentes. Alors

$$A' = QAP$$

et donc, en notant $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$, en notant q, u, p les endomorphismes canoniquement associés à Q, A, P respectivement,

$$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_p}{}^{\mathcal{B}_n}(q \circ u \circ p)$$

Or, comme Q, P sont inversibles, q, p aussi. Alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} A' &= \operatorname{rg}(q \circ u \circ p) && \text{par définition du rang de } A' \\ &= \operatorname{rg} u && \text{car } q, p \text{ sont des isomorphismes} \\ &= \operatorname{rg} A \end{aligned}$$

où, pour la deuxième égalité, on a utilisé la propriété 16.29 du chapitre précédent. □

Définition 17.25

On se place dans l'ensemble $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq r \leq \min(n,p)$, on pose

$$J_r := \begin{array}{cc} & \overbrace{\qquad\qquad}^{r \text{ colonnes}} \\ r \text{ lignes} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & 1 & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

La matrice J_r vérifie $\operatorname{rg} J_r = r$ (on le montrera dans la section suivante).

Proposition 17.26

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $r = \operatorname{rg}(A)$. Alors A est équivalente à J_r.
En particulier, étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$ de rang r, il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u) = J_r$.

Heuristique de la preuve. On fait des opérations élémentaires sur A pour arriver à une matrice J_R. Par opérations sur les lignes on peut mettre la matrice A sous forme échelonnée réduite et mettre tous ses pivots à 1. Par permutation de colonnes, on peut disposer tous les pivots le long de la "diagonale". Ainsi A est équivalente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & 0 & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & \boxed{1} & * & \cdots & * \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

Ensuite, on peut faire des opérations sur les colonnes pour éliminer les étoiles restantes. On arrive donc à une matrice de la forme J_R avec $0 \leq R \leq \min(n,p)$. Comme A et J_R sont équivalentes, elles ont le même rang, ainsi $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_R = R$. D'où $R = r$ et A est équivalente à J_r. □

Corollaire 17.27

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors A, B sont équivalentes, si et seulement si A, B ont le même rang.

Démonstration. Sens direct : cela découle de la Proposition 17.24. Sens réciproque : si $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$, alors par ce qui précède A et B sont toutes deux équivalentes à J_r, donc A et B sont équivalentes par transitivité. □

4.5 Calcul pratique du rang

Méthode

Pour calculer le rang de A, on peut faire des opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour se ramener à une matrice de la forme J_r, mais il y a diverses techniques pour ne pas avoir besoin d'aller jusque-là :

- Si on met la matrice A sous forme échelonnée, alors $\operatorname{rg} A$ est égal au nombre de pivots.
- Après opérations sur les lignes et/ou colonnes, on peut reconnaitre que les vecteurs colonnes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\operatorname{rg} A = r$ (cf Lemme 17.28).
- Après opérations sur les lignes et/ou colonnes, on peut reconnaitre que les vecteurs lignes engendrent un s.e.v. de dimension r : alors $\operatorname{rg} A = r$ (cf Corollaire 17.30).

Lemme 17.28

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \cdots & \mathcal{C}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Alors $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$.

Démonstration. Soit $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ le morphisme canoniquement associé à A. Alors en posant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a par définition de u_A :

$$u_A(e_1) = \mathcal{C}_1 \qquad \cdots \qquad u_A(e_n) = \mathcal{C}_n$$

Alors, comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E,

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u_A \underset{\text{Lemme 16.27}}{=} \dim \operatorname{Vect}(u_A(e_1), \dots, u_A(e_n)) = \dim (\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n)$$

□

Exemple 14. La matrice J_r définie plus haut est de rang r. En effet :

$$\operatorname{rg} J_r =$$

Proposition 17.29

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal à celui de sa transposée : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^\top$.

Démonstration. Soit $r = \mathrm{rg} A$. Alors A est équivalente à une matrice $J_r \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$: il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = QJ_rP$$

En passant à la transposée, on obtient

$$A^\top = P^\top J_r^\top Q^\top$$

Et comme P, Q sont inversibles, $P^\top, Q^\top$ aussi. Ainsi, $A^\top$ est équivalente à $J_r^\top$. Or, $J_r^\top$ est une matrice de forme

$$J_r^\top = \begin{array}{r} r \text{ lignes} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r \text{ colonnes}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et on montre que $\mathrm{rg} J_r^\top = r$. Par équivalence de matrices, $\mathrm{rg} A^\top = \mathrm{rg} J_r^\top = r = \mathrm{rg} A$. □

Corollaire 17.30

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice dont on note $L_1, \dots, L_p$ les vecteurs colonnes qui la constituent :

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & L_1 & \cdots \\ \cdots & L_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & L_p & \cdots \end{pmatrix}$$

Alors $\mathrm{rg} A = \dim \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_p)$.

Démonstration. On a $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A^\top$. Or,

$$A^\top = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

D'où $\mathrm{rg} A = \dim \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_p)$ par le Lemme 17.28. □

Exemple 15. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang de

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & b & a \end{pmatrix}$$